Théorème de Huchinson

Cadre

On se donne (X, d) un espace métrique complet. Soit $\mathcal{K}(X)$ l'espace des compactes non vides de E muni de la distance de Hausdorff

$$\delta(A, B) = \max\left(\max_{b\in B}(d_A(b)),\ \max_{a\in A}(d_B(a))\right)$$

On montre que $\mathcal{K}(X)$ est complet et que si $f_1, \cdots f_k$ sont des applications contractantes sur X, alors l'application

$$F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)\ A \mapsto \bigcup_{i=1}^{k} f_i(A)$$

est contractante sur $\mathcal{K}(X)$. On peut alors lui appliquer le théorème du point fixe de Banach et construire des fractales avec

Recasages :

- 203 Compacité
- 205 Espaces complets
- 226 Suites récurrentes

Références : Je l'ai fait sans référence à partir de la version de mickael (dont j'ai changé la preuve de la précompacité parce que sinon ça rentre jamais dans 15m). J'ai vu après coup que certains éléments étaient faits dans Topologie de Quéffélec (je sais plus lesquels). On a aussi une preuve totalement différente faite dans Analyse mathématique de Testard

Note
Ce développement est long et assez risqué. Si on le présente, il faut être capable de montrer les résultats suivants qu'on va utiliser sans démonstration :

- Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$ et $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $d(x, y) \leq \delta(A, B)$. Ce résultat va servir à de **nombreuses** reprises. Il faut bien l'avoir en tête au moment de lire ce document
- δ est une distance
- Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge
- Une suite de réels positifs qui tend vers 0 admet une sous suite sommable et décroissante
- Dans un espace complet, un ensemble fermé et précompact est compact

Déroulé du développement

$\mathcal{K}(X)$ **est un espace complet**

Soit (A_n) une suite de Cauchy et $r_n = \sup_{p,q\geq n} \delta(A_p, A_q)$

Par hypothèse $r_n \to 0$. Quitte à extraire une suite de (A_n) on suppose que (r_n) est sommable et décroissante. Notons $R_n = \sum_{k\geq n} r_k$ son reste

Soit E l'ensemble des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$ pour tout n (E est parfois noté $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$)

Soit A l'ensemble des points de X qui sont valeur d'adhérence d'une suite $(x_n) \in E$, on va montrer que $A \in \mathcal{K}(X)$ et que $\delta(A_n, A) \to 0$

lemme 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ **et** $x \in A_n$**, il existe** $y \in A$ **tel que** $d(x, y) \leq R_n$

Soit $(x_k)_{k\geq n}$ la suite définie par

- $x_n = x$
- pour tout $k \geq n$, x_{k+1} est un élément de A_{k+1} tel que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \delta(A_k, A_{k+1})$

Pour $p, q \geq n$, on a

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=p}^{q-1} \delta(A_k, A_{k+1}) \leq R_n \to 0$$

Donc $(x_k)_{k\geq n}$ est de Cauchy, donc elle converge vers une limite y. Par construction (et quitte à rajouter des termes à (x_k) avant le rang n pour les jury tatillons), on a $y \in A$. Et pour tout $N \geq n$, on a

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) \leq \sum_{k=n}^{N-1} r_k + d(x_N, y)$$

Et un passage à la limite quand $N \to +\infty$ donne bien $d(x, y) \leq R_n$
□

lemme 2 : Pour tout $x \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in A_n$ tel que $d(x, y) \leq 2r_n$

Soit $k \geq n$ assez grand pour qu'il existe $z \in A_k$ tels que $d(x, z) \leq r_n$
Soit $y \in A_n$ tel que $d(z, y) \leq \delta(A_k, A_n)$, on a donc

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r_n + \delta(A_k, A_n) \leq 2r_n$$

□

lemme 3 : A est bien un élément de $\mathcal{K}(X)$

Le lemme 1 montre que A est non vide, reste à montrer qu'il est bien compact
On admet que $A = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ (la preuve est donné dans les détails après le développement mais elle rentre pas dans les 15m). A est donc est fermé, montrons qu'il est précompact

Soit $\varepsilon > 0$ et soit n tel que $\sum_{k\geq n} r_k \leq \varepsilon$ et $2r_n \leq \varepsilon$

A_n est compact, donc on a $x_1, \cdots, x_p \in A_n$ tq $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \varepsilon)$

Donc le lemme 1 donne $y_1, \cdots, y_p \in A$ tels que $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B(y_k, 2\varepsilon)$

Donc le lemme 2 donne $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B(y_k, 3\varepsilon)$

Donc A est précompact, donc compact
□

lemme 4 (fin) : (A_n) converge vers A pour la distance de Hausdorff

Pour $x \in A_n$, le lemme 1 donne $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq R_n$
Donc $d_A(x) \leq R_n$, donc par passage au sup, on a $\sup_{x\in A_n} d_A(x) \leq R_n \to 0$

Et pour $x \in A$, le lemme 2 donne $y \in A_n$ tel que $d(x, y) \leq 2r_n$
Et le même raisonnement montre que $\sup_{x\in A} d_{A_n}(x) \to 0$

Donc on a bien $\delta(A_n, A) \to 0$
□

F est contractante

Les f_i sont contractantes, soit k le max des rapports de Lipschitz des f_i, de sorte que les f_i sont toutes k-lipschitziennes avec $k < 1$, on va montrer que F est k-lipschitzienne

Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$
Pour $x \in F(A)$ on a i tel que $x = f_i(y)$ avec $y \in A$
Soit $z \in B$ tel que $d(y, z) \leq \delta(A, B)$
On a $d(x, f_i(z)) = d(f_i(y), f_i(z)) \leq kd(y, z) \leq k\delta(A, B)$, donc $d_{F(B)}(x) \leq k\delta(A, B)$

On en déduit $\sup_{x\in F(A)} d_{F(B)}(x) \leq k\delta(A, B)$, et on montre exactement pareil que $\sup_{x\in F(B)} d_{F(A)}(x) \leq k\delta(A, B)$
Donc on a bien $\delta(F(A), F(B)) \leq k\delta(A, B)$, donc F est bien contractante

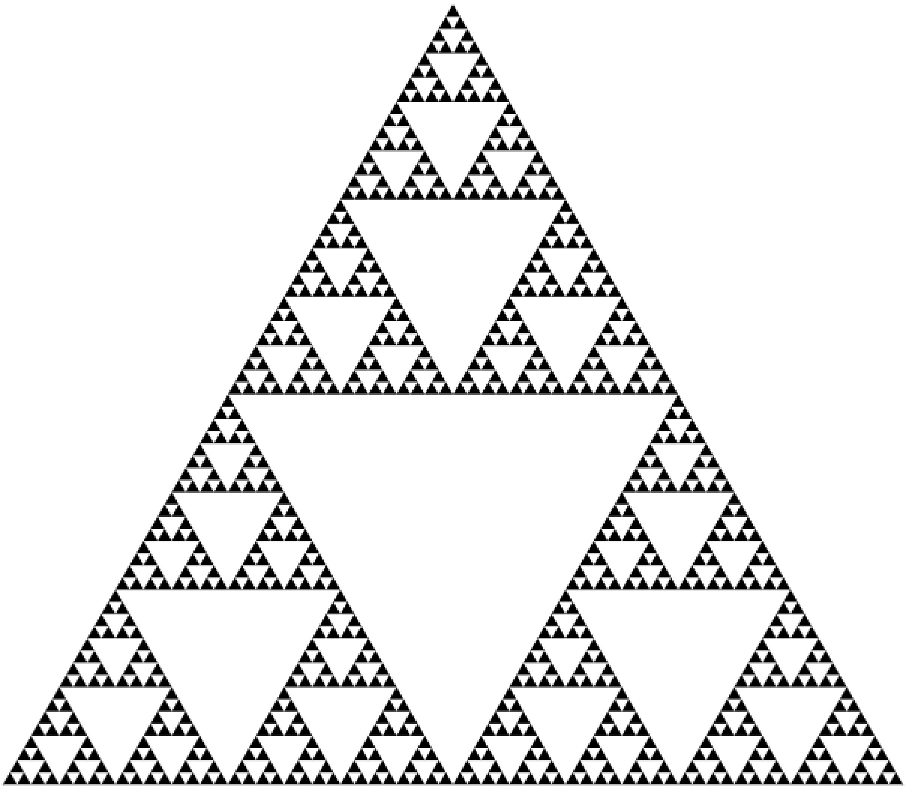
Une application importante à mentionner sans la faire

$\mathcal{K}(X)$ est complet et F est contractante. Donc par théorème de Banach, elle admet un unique point fixe, que l'on peut construire effectivement comme limite de la suite récurrente $A_{n+1} = F(A_n)$

Par exemple plaçons nous sur $X = \mathbb{C}$ et considérons les trois fonctions contractantes suivantes

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z}{2} \\ f_2(z) &= \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \\ f_3(z) &= \frac{z}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Je vous laisse vous convaincre que les f_i sont contractantes, et que donc la fonction F qui en découle est contractante sur $\mathcal{K}(X)$. Ci dessous le triangle de Sierpinsky qu'on va noter S (où les deux sommets de en bas sont 0 et 1, et celui du haut est $e^{\frac{i\pi}{3}}$). Je vous laisse vous convaincre que S est un point fixe de F, et que donc c'est le seul par théorème de Banach



On peut maintenant prendre son meilleur langage de programmation et faire un code très simple pour faire des fractales en 2D. Voici un exemple fait en python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(z):
        return z/2

def f2(z):
        return z/2 + 1/2

def f3(z):
        return z/2 + np.exp(1j * np.pi / 3) / 2

def F(A):
        B = []
        for a in A:
                B.append(f1(a))
                B.append(f2(a))
                B.append(f3(a))
```

```python
        return B

def Sierpinsky(N=5):
        A0 = [0]
        # on prend pour A0 un compact non vide qelconque
        # ici on a pris {0} mais ça marche avec n'importe quel ensemble fini
        # d'ailleurs c'est intéressant de voir ce qui se passe en changeant ...

        for i in range(N):
                A0 = F(A0)

        return A0

def affiche_compact(A):
        for a in A:
                if len(A) < 800:
                        # affichage avec des gros points
                        plt.plot(a.real, a.imag, 'k.')

                else:
                        # la même avec des points plus petits
                        # sinon on y voit rien
                        plt.plot(a.real, a.imag, 'k,')

        plt.axis('equal')
        plt.show()

S = Sierpinsky()
affiche_compact(S)
```

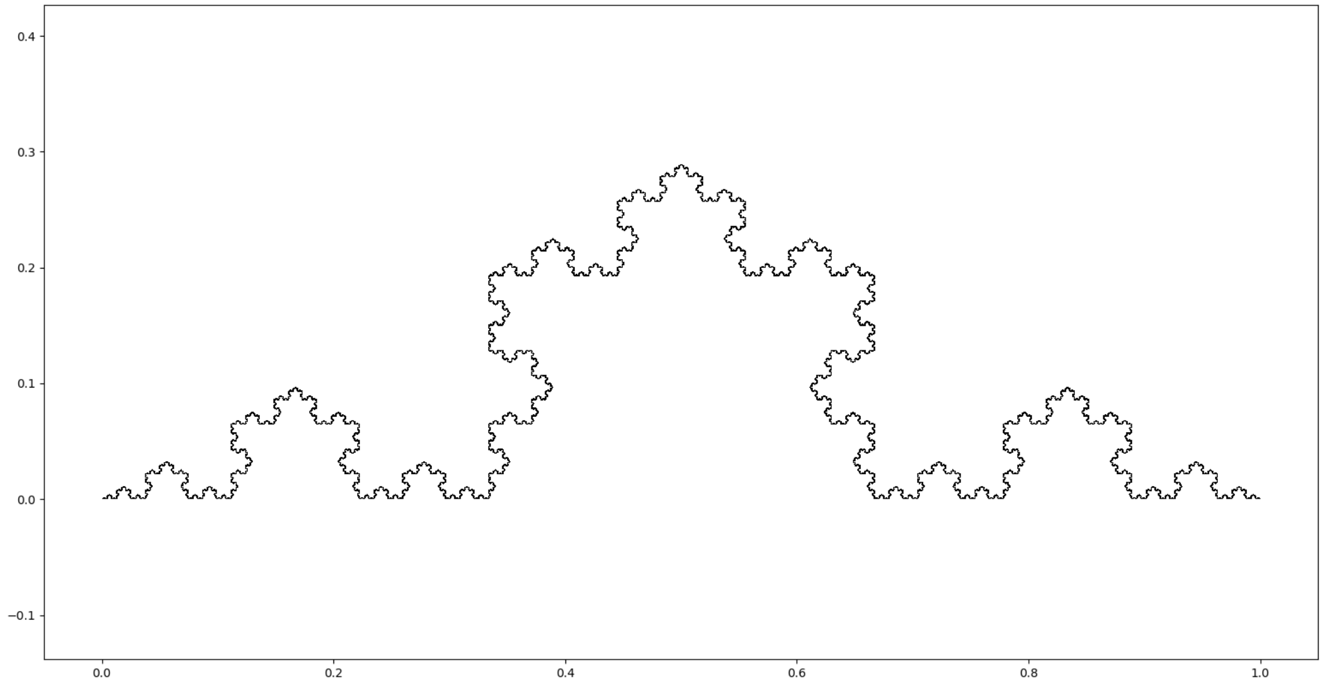
Je vous laisse adapter le code ci dessus et découvrir ce donnent les fonction $f_1(z) = \frac{(1+i)z}{2}$ et $f_2(z) = 1 - \frac{(1-i)z}{2}$, on appelle ça la courbe du dragon

Et aller un dernier pour la route, je vous laisse adapter le code pour voir ce que donnent les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
f_2(x,y) &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\
f_3(x,y) &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\
f_4(x,y) &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On appelle ça la fougère de Barnsley

Et pour les plus déterminé.es je vous laisse trouver les fonctions qui permettent d'obtenir la courbe de Von Koch ci dessous (la structure de $\mathbb{C}$ va être d'un grand secours pour les rotations)



Détail de certains points

Soient A, B deux compacts non vides et $x \in A$, montrer qu'il existe $y \in B$ tel que $d(x, y) \leq \delta(A, B)$

L'application $y \mapsto d(x, y)$ est continue (en fait une IT montre qu'elle est 1-lip), donc par compacité de B on a $y \in B$ tel que $d_B(x) = d(x, y)$
On a donc

$$d(x, y) = d_B(x) \leq \max_{x \in A} d_B(x) \leq \delta(A, B)$$

Justifier que δ est bien une distance

Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$ tels que $\delta(A, B) = 0$
On a $\max_{a \in A}(d_B(a)) = 0$, donc pour tout $a \in A$ on a $d_B(a) = 0$, donc comme B est fermé on a $a \in B$, donc $A \subseteq B$. On montre exactement de la même manière que $B \subseteq A$. On a donc $A = B$

La symétrie est immédiate

L'inégalité triangulaire va être plus tricky
Soient $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ et soit $a \in A$
Soit $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq \delta(A, B)$, et soit $c \in C$ tel que $d(b, c) \leq \delta(B, C)$. On a donc $d(a, c) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$, donc $d_C(a) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$. Donc en passant au sup on obtient

$$\sup_{a \in A} d_C(a) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$$

On montre exactement de la même manière que $\sup_{c \in C} d_A(c) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$, on obtient donc bien $\delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$

On peut aussi montrer que c'est une distance en montrant que $\delta(A, B) = \|d_A - d_B\|_\infty$

Pour $x \in X$, soient $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d_A(x) = d(x, a)$ et $d_B(x) = d(x, b)$
On a donc $|d_A(x) - d_B(x)| = |d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b) \leq \delta(A, B)$
Donc $\|d_A - d_B\|_\infty \leq \delta(A, B)$

Réciproquement pour $a \in A$ on a $d_B(a) = |d_B(a) - d_A(a)| \leq \|d_A - d_B\|_\infty$
Donc $\max_{a \in A} d_B(a) \leq \|d_A - d_B\|_\infty$ et de même $\max_{b \in B} d_A(b) \leq \|d_A - d_B\|_\infty$, donc $\delta(A, B) \leq \|d_A - d_B\|_\infty$

Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge

Soit (x_n) une suite de Cauchy et φ une extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \to l$
Soit $\varepsilon > 0$, on a N tel que $n \geq N \Rightarrow |x_{\varphi(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a N' tel que $n, p \geq N' \Rightarrow |x_n - x_p| < \frac{\varepsilon}{2}$
Pour $n \geq \max(N, N')$, on a

$$|x_n - l| = |x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - l| \leq |x_n - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - l| = \varepsilon$$

donc $x_n \to l$

Montrer que si $u_n \to 0$, alors u_n admet une sous suite sommable décroissante

On va définir φ par récurrence
Soit $\varphi(0)$ tel que $u_\varphi(0) \leq 1$
Et si $\varphi(n)$ a été défini, soit $\varphi(n+1)$ assez grand pour avoir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_\varphi(n+1) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
Par construction on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

Le même argument montre qu'on peut supposer (u_n) décroissante

Montrer que dans un espace complet, un ensemble fermé et précompact est compact

Pour rappel, un ensemble est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε
Soit A un fermé précompact, et (x_n) une suite à valeur dans A. On va construire une suite extraite convergente par récurrence.

Par précompacité de A, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon 1. Une de ces boules contient donc une infinité de termes de (x_n). Soit B_1 cette boule, et soit $\varphi(1)$ un entier tel que $x_{\varphi(1)} \in B_1$
On suppose qu'on a construit B_n et $\varphi(n)$. On recouvre A par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{n+1}$. Soit B_{n+1} une de ces boules telle que $B_n \cap B_{n+1}$ contient une infinité de termes de (x_n) (qui existe parce que B_n en contenait déjà une infinité). Et soit $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ un de ces termes

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n, p \geq N$, par construction de φ on a $x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)} \in B_N$, donc $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) \leq \varepsilon$. Donc $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy, donc elle converge
Donc comme A est fermé, elle converge dans A, donc A est bien compact

Justifier que $A = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$

Soit $x \in A$, on a une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$ où $x_{\varphi(n)} \in A_{\varphi(n)}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme la suite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq n}$ est une suite à valeur dans $\bigcup_{k\geq n} A_k$, on a $x \in \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Donc on a bien $x \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$

Et réciproquement si $x \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$, on va définir par récurrence une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x
$x \in \overline{\bigcup_{k\geq 0} A_k}$, donc il existe un entier $\varphi(0) \geq 0$ et $x_{\varphi(0)} \in A_{\varphi(0)}$ tel que $d(x, x_{\varphi(0)}) \leq 1$
Supposons que $\varphi(n-1)$ a été défini, on a $x \in \overline{\bigcup_{k>\varphi(n-1)} A_k}$ donc il existe $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $x_{\varphi(n)} \in A_{\varphi(n)}$ tel que $d(x, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{n}$

Par construction on a bien $(x_{\varphi(n)}) \to x$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, x_{\varphi(n)} \in A_{\varphi(n)}$ donc quitte à prolonger la suite $(x_{\varphi(n)})$ en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a bien $x \in A$

On utilise se résultat pour montrer que A est fermé, on peut aussi le faire par caractérisation séquentielle. Par contre ça implique de manipuler des suites de suites, c'est un peu lourd quand (comme moi) on a pas l'habitude

Version révisions

On se donne (X, d) un espace métrique complet. Soit $\mathcal{K}(X)$ l'espace des compactes non vides de E muni de la distance de Hausdorff

$$\delta(A, B) = \max\left(\max_{b\in B}(d_A(b)),\ \max_{a\in A}(d_B(a))\right)$$

On se propose de montrer que $\mathcal{K}(X)$ est complet et que si $f_1, \cdots f_k$ sont des applications contractantes sur X, alors l'application

$$F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)\ A \mapsto \bigcup_{i=1}^{k} f_i(A)$$

est contractante sur $\mathcal{K}(X)$

Soit (A_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{K}(X)$ et $r_n = \sup_{p,q \geq n} \delta(A_p, A_q)$. Quitte à extraire une sous suite on suppose que (r_n) est sommable, et quitte à supposer que (A_n) est pas stationnaire, on suppose que $r_n > 0$ pour tout n
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites (x_n) telles que $x_n \in A_n$ pour tout n

lemme 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A_n$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) \leq \sum_{k \geq n} r_k$
lemme 2 : Pour tout $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in A_n$ tel que $d(x, y) \leq 2r_n$

On se place dans le cadre du lemme 1

1. Construire par récurrence une suite de Cauchy $(x_k)_{k \geq n}$ telle que $x_n = x$ et $x_k \in A_k$ pour tout k
2. En déduire le lemme 1 avec un passage à la limite bien senti

On se place dans le cadre du lemme 2
3. Construire un $z \in A_k$ tel que $d(x, z) \leq r_n$ et en déduire le lemme 2

On admet que $A = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, il est donc fermé
4. Montrer que A est précompact en utilisant la compacité d'un A_n bien senti plus le lemme 1, puis le lemme 2
5. Montrer que (A_n) converge bien vers A

On se place dans le cadre de F, soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$ et soit k le max des rapports de Lipschitz des f_i
6. Soit $x \in A$, montrer que $d_{F(B)}(x) \leq k\delta(A, B)$
7. En déduire que F est k-lipschitzienne